

# A note on fractional covers of a graph\*

John Baptist Gauci , Jean Paul Zerafa<sup>†</sup> 

*Department of Mathematics, University of Malta, Malta*

Received 20 December 2020, accepted 16 February 2022, published online 4 October 2022

---

## Abstract

A fractional colouring of a graph  $G$  is a function that assigns a non-negative real value to all possible colour-classes of  $G$  containing any vertex of  $G$ , such that the sum of these values is at least one for each vertex. The fractional chromatic number is the minimum sum of the values assigned by a fractional colouring over all possible such colourings of  $G$ . Introduced by Bosica and Tardif, fractional covers are an extension of fractional colourings whereby the real-valued function acts on all possible subgraphs of  $G$  belonging to a given class of graphs. The fractional chromatic number turns out to be a special instance of the fractional cover number. In this work we investigate fractional covers acting on  $(k + 1)$ -clique-free subgraphs of  $G$  which, although sharing some similarities with fractional covers acting on  $k$ -colourable subgraphs of  $G$ , they exhibit some peculiarities. We first show that if a simple graph  $G_2$  is a homomorphic image of a simple graph  $G_1$ , then the fractional cover number defined on the  $(k + 1)$ -clique-free subgraphs of  $G_1$  is bounded above by the corresponding number of  $G_2$ . We make use of this result to obtain bounds for the associated fractional cover number of graphs that are either  $n$ -colourable or  $a:b$ -colourable.

*Keywords:* fractional chromatic number, fractional cover, Kneser graph,  $n$ -colouring,  $a:b$ -colouring.

*Math. Subj. Class.:* 05C15, 05C72.

---

---

\*The research work disclosed in this publication is funded by the ENDEAVOUR Scholarship Scheme (Malta). The scholarship may be part-financed by the European Union – European Social Fund (ESF) under Operational Programme II – Cohesion Policy 2014–2020, “Investing in human capital to create more opportunities and promote the well being of society”.

<sup>†</sup>Corresponding author.

*E-mail addresses:* john-baptist.gauci@um.edu.mt (John Baptist Gauci), zerafa.jp@gmail.com (Jean Paul Zerafa)

# Frakcijska pokritja grafa\*

John Baptist Gauci , Jean Paul Zerafa<sup>†</sup> *Department of Mathematics, University of Malta, Malta*

Prejeto 20. decembra 2020, sprejeto 16. februarja 2022, objavljeno na spletu 4. oktobra 2022

---

## Povzetek

*Frakcijsko barvanje grafa*  $G$  je funkcija, ki vsakemu nepraznemu barvnemu razredu grafa  $G$  priredi neko nenegativno realno vrednost, pri čemer je za vsako vozlišče grafa  $G$  vsota teh vrednosti najmanj ena. *Frakcijsko kromatsko število* je minimalna vsota vrednosti, ki so prirejene barvnim razredom grafa  $G$  s frakcijskim barvanjem, pri čemer upoštevamo vsa takšna barvanja grafa  $G$ . Frakcijska pokritja, ki sta jih vpeljala Bosica in Tardif, so razširitev frakcijskih barvanj, pri čemer je funkcija, ki priredi realne vrednosti, definirana na vseh podgrafih grafa  $G$ , ki pripadajo določenemu razredu grafov. Pokaže se, da je frakcijsko kromatsko število poseben primer števila frakcijskega pokritja.

V tem delu raziskujemo frakcijska pokritja podgrafov grafa  $G$ , ki ne vsebujejo  $(k + 1)$ -klik; ta pokritja imajo, čeprav si delijo nekaj podobnosti s frakcijskimi pokritji  $k$ -barvnih podgrafov grafa  $G$ , nekaj posebnih lastnosti. Najprej pokažemo: če je enostaven graf  $G_2$  homomorfná slika enostavnega grafa  $G_1$ , potem je število frakcijskega pokritja podgrafov grafa  $G_1$  brez  $(k + 1)$ -klik omejeno navzgor z ustreznim številom grafa  $G_2$ . Od tod izpeljemo meje, ki veljajo za pridruženo število frakcijskega pokritja  $n$ -barvnih ter  $a:b$ -barvnih grafov.

*Ključne besede:* Frakcijsko kromatsko število, frakcijsko pokritje, Kneserjev graf,  $n$ -barvanje,  $a:b$ -barvanje.

*Math. Subj. Class.:* 05C15, 05C72.

---

---

\*Raziskovalno delo, predstavljeno v tej publikaciji, financira ENDEAVOUR Scholarship Scheme (Malta). To štipendija delno financira Evropska unija – Evropski socialni sklad (ESF) v okviru Operativnega programa II – Kohezijska politika 2014–2020, “Vlaganje v človeški kapital za ustvarjanje več priložnosti in spodbujanje blaginje družbe”.

<sup>†</sup> Kontaktni avtor.

*E-poštni naslovi:* john-baptist.gauci@um.edu.mt (John Baptist Gauci), zerafa.jp@gmail.com (Jean Paul Zerafa)